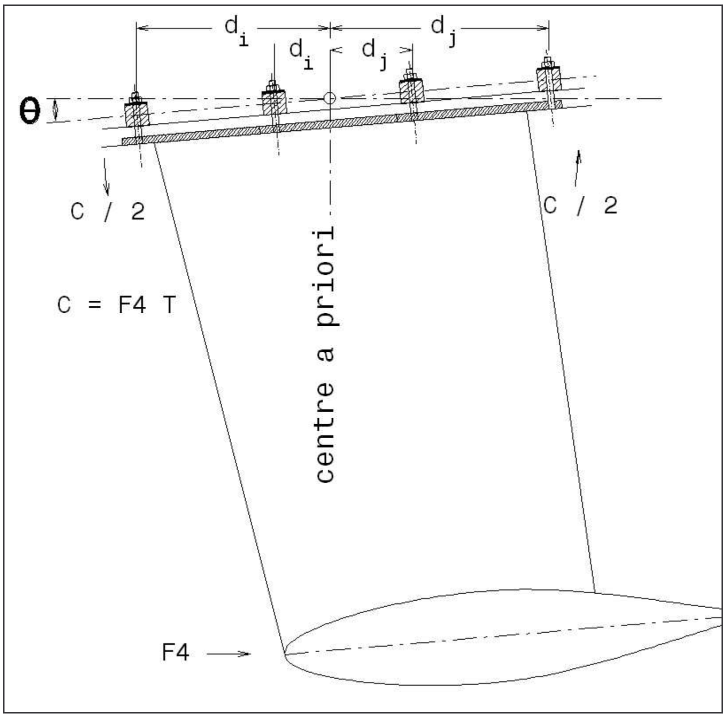


Exemple de quille fixée sur un système de 4 varangues.
Le "centre de rotation" est dessiné "a priori" pour un premier calcul.
A partir de l'axe passant par ce centre on devrait calculer un équilibre des moments tel que la somme des moments avant soit égale à la somme des moments arrière.
Ces moments dépendent de la réaction de chaque varangue selon sa raideur, sa portée et son cas de chargement (répartie, extrémités encastrées, etc).
Une poutre soumise à une certaine charge pendra une flèche, par exemple :

$f = \frac{PL^3}{48EI}$ pour une charge centrée simple

EI : raideur de la poutre
l : sa portée
A l'inverse, et connaissant EI, on déduit la charge P à partir de la flèche :

$$P = \frac{48EIf}{l^3}$$

On connait f en partant du principe que la quille est infiniment rigide dans le sens longitudinal.
Si la quille "tourne" de la valeur d'un angle θ, alors :

$$f_i = d_i \tan\theta$$

Et $P_i = \frac{48EI_i d_i \tan\theta}{l_i^3}$ (selon le cas de chargement).

En notant $k_i = \frac{48EI_i}{l_i^3}$ alors $P_i = k_i d_i \tan\theta$

et le moment de P_i par rapport au centre de rotation :

$$M_i = k_i d_i \tan\theta . d_i = k_i d_i^2 \tan\theta$$

de même $M_j = k_j d_j \tan\theta . d_j = k_j d_j^2 \tan\theta$

soit $M_j = k_j d_j \tan\theta . d_j = k_j d_j^2 \tan\theta$

Pour l'équilibre des moments on devrait trouver :

$\sum M_i = \sum M_j$ ou $\sum k_i d_i^2 = \sum k_j d_j^2$

Ce ne sera pas le cas, sauf chance extraordinaire.

Calcul de la position du centre de rotation

Décalons l'axe de la distance x et calculons la valeur de x pour que l'équilibre des moments soit respecté :

$$\sum[k_i\ (d_i + x)^2] = \sum[k_j\ (d_j - x)^2]$$

$$\sum[k_i\ (d_i^2 + x^2 + 2d_i x)] = \sum[k_j\ (d_j^2 + x^2 - 2d_j x)]$$

$$\sum[k_i d_i^2 + kx^2 + k_i 2d_i x] = \sum[k_j d_j^2 + k_j x^2 - k_j 2d_j x\ ]$$

$$\sum[x^2(k_i - k_j) + 2x(k_i + k_j) + k_i d^2{}_i - k_j d^2{}_j] = 0$$

Equation du second degré de la forme $Ax^2 + Bx + C = 0$, avec :

$$A = \sum(k_i - k_j)$$

$$B = 2\sum(k_i + k_j)$$

$$C = \sum(k_i d_i^2 - k_j d_j^2)$$

$$x = \frac{\sqrt{B^2 - 4AC} - B}{2A}$$

Note :

Le calcul de la charge peut être : $k = \dfrac{48EIf}{l^3}$, pour une charge centrée avec appuis simples mais dautres cas de figure existent pour chaque varangue.
Même remarque pour les raideurs EI.
Par exemple une varangue supportée par une cloison aura une raideur très supérieure en fonction de la géométrie de l’ensemble composite.

Contrainte P supportée par chaque varangue i ou j :

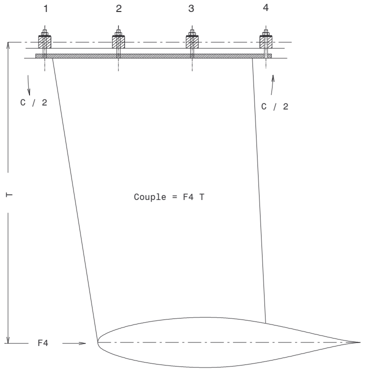
$$\mathrm{P}_i = 0{,}5.\mathrm{C}\ \frac{d_i \dfrac{EI_i}{l_i^3}}{\sum(d_i^2 \dfrac{EI_i}{l_i^3})} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}_j = 0{,}5.\mathrm{C}\frac{d_j \dfrac{EI_j}{l_j^3}}{\sum(d_j^2 \dfrac{EI_j}{l_j^3})}$$

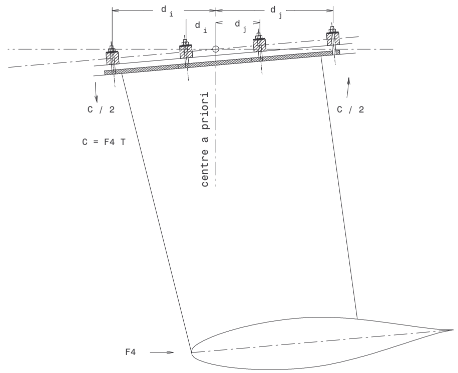
Une fois ces calculs réalisés, on peut vérifier à partir du « centre de rotation » que : $\sum P_i d_i = \sum P_j d_j$

Ensuite on vérifie que chaque varangue est capable d’assumer sa contrainte P.

On calcul « l’angle de rotation » en fonction du cas de chargement de la varangue.

Voir la grille de calcul ci-dessous.





Exemple selon le cas : k = 48.EI / L^3

toujours positif

	N°	L (cm)	EI (cm6)	d (m)	k d (daN)	2 k d	k d²			F	
GAUCHE	1	2100	1349828127	0.795	5.56197	11.12394	4.42177	∑ P d² Gauche			0.5 couple P d / ∑ P d² Gauche
	2	2300	1853705457	0.296	2.16466	4.32933	0.64074				
DROITE	3	2000	1803052427	-0.380	-4.11096	8.22192	-1.56216	∑ P d² Droite			0.5 couple P d / ∑ P d² Droite
	4	1900	1535331841	-0.717	-7.70374	15.40748	-5.52358				
	∑				-4.08807	39.08267	-2.02323				
					A	B	C				

± x = rectification de l'axe de rotation

$$\pm x = \frac{\sqrt{B^2 - 4\,AC} - B}{2\,A} \qquad 0.05205$$

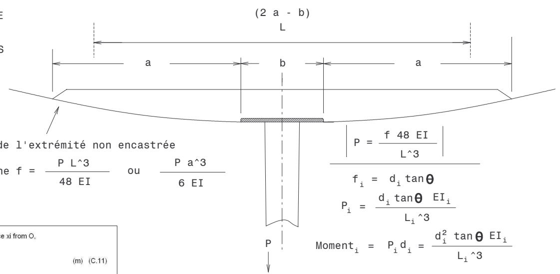
d rectifiés de ± x

Pour un couple de 4000 kg x 2 m = 8000 kgf.m

	N°	L (cm)	EI (cm6)	d (m)	k d (daN)	2 k d	k d²			Contrainte	
GAUCHE	1	2100	1349828127	0.848	5.93277	11.86554	5.03099	∑ P d² Gauche	5.916 (1)	4011	0.5 couple P d / ∑ P d² Gauche
	2	2300	1853705457	0.348	2.54494	5.08988	0.88564			1721	
DROITE	3	2000	1803052427	-0.328	-3.54841	7.09682	-1.16388	∑ P d² Droite	-5.916 (2)	2399	0.5 couple P d / ∑ P d² Droite
	4	1900	1535331841	-0.665	-7.14503	14.29006	-4.75145			4831	
	∑				-2.21573	38.34230	0.00130				
					A	B	C				

(1) = (2)
Égalité recherchée
en valeur absolue

CALCUL DE LA FLÈCHE
OU DE LA CHARGE
EN FONCTION DES CAS



Cas de l'extrémité non encastrée

$$\text{Flèche } f = \frac{P\,L^3}{48\,EI} \quad \text{ou} \quad \frac{P\,a^3}{6\,EI}$$

$$P = \frac{f\,48\,EI}{L^3}$$

$$f_i = d_i \tan\theta$$

$$P_i = \frac{d_i \tan\theta \; EI_i}{L_i^3}$$

$$\text{Moment}_i = P_i d_i = \frac{d_i^2 \tan\theta \; EI_i}{L_i^3}$$

From an arbitrary point (O in Figure 3) with the various floors at the distance xi from O,

$$x_R = \frac{\sum\left[x_i \times (E \times I)_i\right]}{\sum (E \times I)_i}$$ is the longitudinal position of the rotation point (m) (C.11)

Selon ISO 12215-9

20 mars 2017
Patrick Balta